1. a) Sean A, B y X matrices cuadradas de orden n. Despeja X en la ecuación **X.A = 2X + B²**

b) Calcula la matriz X, siendo A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

a)
$$X.A = 2.X + B^2 \Rightarrow X.A - 2X = B^2 \Rightarrow X.(A - 2\,Id) = B^2 \Rightarrow$$
$$X.(A - 2Id).(A - 2Id)^{-1} = B^2.(A - 2Id)^{-1} \Rightarrow$$
$$X = B^2.(A - 2\,Id)^{-1}$$

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ $\quad (A-2Id) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad (A-2Id)^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = B^2.(A-2Id)^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -12 & -2 \\ 0 & -16 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix} = -2.\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. a) Clasifica, en función del parámetro k, el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} kx - y - z & = & 2 \\ 5x + 3y + 3z & = & 0 \\ 3x + 2y + kz & = & 1 \end{cases}$$

b) Resuélvelo para k=0, si es posible.

SOLUCIÓN.

a) Escribimos la matriz asociada al sistema $\left\langle \begin{array}{ccc|c} k & -1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & k & 1 \end{array} \right\rangle$. Calculamos el rango de la matriz A de los coeficientes. Como es una matriz cuadrada de orden 3, lo más sencillo es calcular el determinante de la matriz A.

$A = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & k \end{pmatrix}$ Det(A) = (k-2).(3k+5)

Por tanto:

- Si $k \neq 2 \;, y, \; k \neq \frac{-5}{3}$, entonces se tiene **Rg(A) = Rg(A*) = 3 = nº incógnitas**, luego el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (solución única que obviamente dependerá del valor de k)

- Si k=2, tenemos que Rg(A) = 2, y , Rg(A^*) = 3, luego el sistema es INCOMPATIBLE.
- Si k=-5/3, tenemos que Rg(A) = 2, Rg(A^*) = 3, luego el sistema es INCOMPATIBLE.

b) Resolvamos ahora el sistema para k=0, que como hemos visto antes saldrá COMPATIBLE DETERMINADO
Se puede resolver por Cramer, o por el método de Gauss y el resultado es:

$$x=\frac{6}{5},\qquad y=\frac{-13}{10},\qquad z=\frac{-7}{10}$$

3. a) Sean A, B y X matrices cuadradas de orden n. Despeja la matriz X en la ecuación A.X.B = B^2

b) Calcula la matriz X siendo A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A.X.B=B^2 \Rightarrow A^{-1}.A.X.B.B^{-1}=A^{-1}.B^2.B^{-1} \Rightarrow X=A^{-1}.B.B.B^{-1} \Rightarrow X=A^{-1}.B$

b) $X=A^{-1}.B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

4. a) Calcula, en función del parámetro k, las soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & k & x \end{vmatrix} = 0$$

b) ¿Para qué valor de k, la ecuación anterior tiene una única solución?

Solución.

a) $\begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=3.(1-2x)$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & k & x \end{vmatrix}=k-x^2 \Rightarrow 3-6x-k+x^2=0\Rightarrow$

$$x^2-6x+(3-k)=0 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-12+4k}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4(6+k)}}{2}=\frac{6\pm 2\sqrt{k+6}}{2}=3\pm\sqrt{k+6}$$

b) Si $k=-6$, la solución es única y es $x=3$.

5. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix}=6$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} z/2 & z+7 & 3 \\ y/2 & y & 3 \\ x/2 & x+3 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $$\begin{vmatrix} \frac{z}{2} & z+7 & 3 \\ \frac{y}{2} & y & 3 \\ \frac{x}{2} & x-3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\left(\begin{vmatrix} z & z & 1 \\ y & y & 1 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & 7 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ x & -3 & 1 \end{vmatrix} \right) = \frac{3}{2}\cdot(-6) = -9$$

b) Desarrollamos por los elementos de la cuarta fila

$$\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\,.\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2.6 = 12$$

6. a) Clasifica el siguiente sistema según los valores del parámetro k,

$$\begin{cases} x-2y+kz=0 \\ -ky+2z=0 \\ 2x-y+(k+1)z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$ y resuélvelo para k= - 2

Solución.
Es un sistema homogéneo (todos los términos independientes son iguales a cero) luego nunca puede ser incompatible. También sabemos que en los sistemas homogéneos que son compatibles determinados la solución única es la solución trivial (x=y=z=…=0)
Calculemos el rango de la matriz de los coeficientes en función del parámetro k.

$Rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & k \\ 0 & -k & 2 \\ 2 & -1 & k+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cuando una matriz no es cuadrada, la manera más cómoda es tomar un determinante del mayor orden posible que tenga pocas k y estudiar cuándo es distinto de cero y cuando es cero.

Para aquellos valores que sea distinto de cero (que serán infinitos) el rango será el orden de dicho determinante, y sólo habrá que estudiar aparte el rango de la matriz inicial para los valores que hayan hecho cero al determinante elegido (que son muy pocos)

Elegimos el determinante

$$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} 1 & -2 & k \\ 0 & -k & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad k^2 - k - 6$$

=

- Luego si $k \neq 3$, $k \neq -2$, el Rg(A)=3, y como es homogéneo y tiene tres incógnitas, el sistema es compatible determinado con solución trivial x=y=z=0

Veamos ahora el Rango de A cuando k=3, y cuando k=-2

- Si k = 3 , comprobamos que $Rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

luego el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad.

- Si k = -2, comprobamos que $Rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

luego el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad.

Vamos a resolverlo como pide el apartado b).

Como el rango es dos, lo que nos indica es que de las 4 ecuaciones iniciales, sólo hay dos que son linealmente independientes, por eso, tomamos la segunda y la cuarta ecuaciones y nos queda el sistema: $\begin{cases} 2y + 2z & = 0 \\ x + y + z & = 0 \end{cases}$, que evidentemente tiene como conjunto de soluciones las siguientes: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

7. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Encuentra la expresión de la potencia n-ésima de A. En otras palabras, calcula la expresión de A^n, donde n es un número natural cualquiera.
b) Razona que la matriz A^n tiene inversa para cualquier valor de n, y calcula dicha matriz inversa.

Solución.
a) Vamos a calcular las primeras potencias de A para ver la regla de formación.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad A^3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\ldots.. \ A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b) Para estudiar si una matriz tiene inversa tenemos que estudiar cuándo su determinante es distinto de cero.
Así, como det (A^n) = 1, para cualquier valor de n, resulta que A^n tiene matriz inversa independientemente del valor de n

Resulta que $(A^n)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-n\\0&0&1\end{pmatrix}$

8. Encuentra, si es posible, un valor del parámetro k, para que el sistema

$$\begin{cases} -ky+2z=0 \\ 2x-y+(k+1)z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

a) Sea compatible determinado
b) Sea compatible indeterminado
c) Sea incompatible

Solución.

Se trata de un sistema homogéneo (todos los términos independientes son nulos), luego nunca puede ser incompatible.

Será compatible determinado cuando el rango de la matriz de los coeficientes sea 3, y será compatible indeterminado cuando el rango de la matriz de coeficientes sea < 3.

Calculamos el rango mediante el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\begin{vmatrix} 0 & -k & 2 \\ 2 & -1 & k+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 + k + 6 = 0 \Leftrightarrow k = 3, k = -2$$

- si $k \neq 3$, $k \neq -2$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (y como es homogéneo la solución es la trivial x=y=z=0)
- si k=3, ó, k=-2, el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO